Cevap Anahtarı

1) $(a,b)=1$ ise $(a+b, a-b)=d$ olsun.

Ebob tanımından $d \mid a+b \wedge d \mid a-b$

$$\Rightarrow d \mid 2a \wedge d \mid 2b$$

$$\Rightarrow d \mid (2a, 2b)$$

$$\Rightarrow d \mid 2$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ veya } d=2$$

2) $A \neq \emptyset$: $e \in G$ olmak üzere $e \in H$ $(H \leq G)$ ve $ehe^{-1}=h$ olduğundan $e \in A$.

$A \subseteq G$; A'nın tanımından görülür

$\forall x, y \in A$ için $xhx^{-1}=h$ ve $yhy^{-1}=h$ olur. $\Rightarrow y^{-1}hy=h$

$$(xy^{-1})h(xy^{-1})^{-1} = (xy^{-1})h(y x^{-1})$$

$$= x(y^{-1}hy)x^{-1}$$

$$= xhx^{-1}$$

$$= h \Rightarrow xy^{-1} \in A \text{ dır.}$$

$A \leq G$ olur.

3) öncelikle α'yı ayrık devirlerine parçalayalım

$\alpha = (1\ 4\ 7\ 2\ 8\ 5\ 3\ 6)$ yazılır.

α ile değişmeli olan bütün permütasyonları yani merkezleştiricisini bulalım. Yani $g\alpha g^{-1}=\alpha$ o.ş $g \in S_8$ bulmalıyız

$$(g(1)\, g(4)\, g(7)\, g(2)\, g(8)\, g(5)\, g(3)\, g(6)) = (1\ 4\ 7\ 2\ 8\ 5\ 3\ 6)$$
$$= (4\ 7\ 2\ 8\ 5\ 3\ 6\ 1)$$
$$= (7\ 2\ 8\ 5\ 3\ 6\ 1\ 4)$$
$$= (2\ 8\ 5\ 3\ 6\ 1\ 4\ 7)$$
$$= (8\ 5\ 3\ 6\ 1\ 4\ 7\ 2)$$
$$= (5\ 3\ 6\ 1\ 4\ 7\ 2\ 8)$$
$$= (3\ 6\ 1\ 4\ 7\ 2\ 8\ 5)$$
$$= (6\ 1\ 4\ 7\ 2\ 8\ 5\ 3)$$

Sırasıyla

$M(\alpha) = \{ I, (1\,4\,7\,2\,8\,5\,3\,6\,1), (1\,7\,8\,3)(2\,5\,6\,4),$
$(1\,2\,3\,4\,8\,6\,7\,5), (1\,8)(2\,6)(3\,7)(4\,5),$
$(1\,5\,7\,6\,8\,4\,3\,2), (1\,3\,8\,7)(2\,4\,6\,5),$
$(1\,6\,3\,5\,8\,2\,7\,4) \}$ şeklinde 8 elemanlıdır.

4) $g : H/A \to K$

$hA \to g(hA) = f(h)$ ile tanımlansın.

g'nin iyi tanımlılığı için
$\forall h_1 A, h_2 A \in H/A$ için $h_1 A = h_2 A$ olsun.

$\Rightarrow h_2^{-1} h_1 \in A$

$\overset{A = \text{Çekf}}{\Rightarrow} h_2^{-1} h_1 \in \text{Çekf}$

$\Rightarrow f(h_2^{-1} h_1) = e_K$

$\overset{f \text{ homomorf}}{\Rightarrow} f(h_2^{-1}) f(h_1) = e_K$

$\overset{f \text{ homomorf}}{\Rightarrow} (f(h_2))^{-1} \cdot f(h_1) = e_K$

$\overset{\text{Soldan } f(h_2) \text{ ile çarp}}{\Rightarrow} f(h_1) = f(h_2)$

$\overset{g\text{'nin tanımı}}{\Rightarrow} g(h_1 A) = g(h_2 A)$

5) $\mathbb{Z}_{21}^* = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=11$, $2^6=1$

$4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=1$

$5^1=5$, $5^2=4$, $5^3=20$, $5^4=16$, $5^5=17$, $5^6=1$

$8^1=8$, $8^2=1$

$10^1=10$, $10^2=16$, $10^3=13$, $10^4=4$, $10^5=19$, $10^6=1$

$11^1=11$, $11^2=16$, $11^3=8$, $11^4=4$, $11^5=2$, $11^6=1$

$13^1=13$, $13^2=1$

$16^1=16$, $16^2=4$, $16^3=1$

$17^1=17$, $17^2=16$, $17^3=20$, $17^4=4$, $17^5=5$, $17^6=1$

$19^1=19$, $19^2=4$, $19^3=13$, $19^4=16$, $19^5=10$, $19^6=1$

$20^1=20$, $20^2=1$

Sonuç: $\mathbb{Z}_{21}^*$'in üreteci yoktur devirli değildir.

2. Yol: Zaten 21, bir asalın kuvveti ya da bir asalın kuvvetinin iki katına eşit olmadığından da devirli olmaz.

6) $G = \langle a \rangle$ o.ş $a \in G$ vardır. (G devirli olduğundan)
$H < G$ olsun. H'ın devirli olduğunu gösterelim.
$H = \{e\}$ ise H'ın e ile üretilen bir devirli grup olduğu açıktır.
$H \neq \{e\}$ ve $n \neq 0$ tam sayısı için $a^n \in H$ olsun.
$H < G$ olduğundan $(a^n)^{-1} = a^{-n} \in H$ dır. Genelliği bozmadan $n > 0$ olmak üzere $a^n \in H$ kabul edebiliriz.
Pozitif tamsayıların iyi sıralı küme oluşundan $a^s \in H$ o.ş en küçük pozitif tamsayı s olsun. Bu durumda $H = \langle a^s \rangle$ old. gösterelim.
$a^s \in H$ ve $H < G$ ise $\langle a^s \rangle \subseteq H$.
Tersine $a^n \in H$ alalım. n'yi s ile kalanlı bölerek $n = qs + r$, $0 \leq r < s$, $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ vardır.
$a^n = (a^s)^q . a^r \Rightarrow a^r = a^n (a^s)^{-q} \in H$ olur.
Bu da $0 < r < s$ ve $a^r \in H$ olması s'nin seçimi ile çelişir. $r = 0$, $n = q.s$ dir.
$a^n = (a^s)^q \in \langle a^s \rangle$. Yani
$H \subseteq \langle a^s \rangle$ bulunur.
Hem $\langle a^s \rangle \subseteq H$ hem de $H \subseteq \langle a^s \rangle$ ise
$H = \langle a^s \rangle$ olup H da devirlidir. G ve H keyfi olduğundan devirli bir grubun her alt grubu da devirlidir.

7) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\forall a \in \mathbb{Z}$ için $f(a) = (a+5\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z})$ ile tanımlayalım. Bu tanımla birlikte f bir fonksiyondur. Çekf 'in tanımlı olması için f'in homomorfizma old. göstermeliyiz.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için $f(a+b) = (a+b+5\mathbb{Z}, a+b+7\mathbb{Z})$

$= (a+5\mathbb{Z}+b+5\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z}+b+7\mathbb{Z})$

$= (a+5\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z}) + (b+5\mathbb{Z}, b+7\mathbb{Z})$

$= f(a) + f(b)$ olup

f bir homomorfizmadır.

$\text{Çek} f = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = (5\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z})\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid (a+5\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z}) = (5\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z})\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a+5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \in 5\mathbb{Z}, a \in 7\mathbb{Z}\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \in 5\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z}\}$

$= \{a \in 35\mathbb{Z}\} = 35\mathbb{Z}$

8) G degişmeli grup $H_1, H_2 \leq G$ olsun.

$G = H_1 \oplus H_2$ ise $G = H_1 + H_2$ ve $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ olduğunu ilgili teoreme göre yazabiliriz

2. izomorfizma teoremine göre G degişmeli, $H, K \leq G$ ise $H+K/_K \cong H/_{H \cap K}$ olduğunu biliyoruz.

O halde $H_1, H_2 \leq G$, G degişmeli old. her alt grubu normal alt gruptur. Bölüm grupları tanımlıdır.

$$H_1 + H_2/_{H_1} \cong H_2/_{H_1 \cap H_2}$$ yazılabilir. Yani

$$G/_{H_1} \cong H_2/_{\{0\}} \cong H_2$$ elde edilir

9) $\forall a \in M$ için $o(a) = o(f(a))$ olduğunu gösterelim.

$o(a) = m$ ve $o(f(a)) = n$ olsun.

$$o(a) = m \Rightarrow a^m = e_M$$

$$\overset{f \text{ iyi tanımlı}}{\Rightarrow} f(a^m) = f(e_M)$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{a.a \ldots a}_{m \text{ tane}}) = e_N$$

$$\overset{f \text{ homomorf.}}{\Rightarrow} \underbrace{f(a).f(a) \ldots f(a)}_{m \text{ tane}} = e_N$$

$$\Rightarrow (f(a))^m = e_N \Rightarrow n \mid m \text{ ---(1)--}$$

$$o(f(a)) = n \Rightarrow (f(a))^n = e_N$$

$$\Rightarrow f(a) \ldots f(a) = e_N$$

$$\overset{f \text{ homomorf.}}{\Rightarrow} f(a^n) = e_N = f(e_M)$$

$$\overset{f \text{ birebir}}{\Rightarrow} a^n = e_M \Rightarrow m \mid n \text{ ---(2)--}$$

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir

10) $\forall a \in G$ için $|aH| = |H|$ old. gösterelim.

$f : aH \to H$

$ah \to f(ah) = h$ ile tanımlayalım.

f iyi tanımlıdır: $ah_1 = ah_2 \Rightarrow a^{-1}.ah_1 = a^{-1}ah_2$

$\Rightarrow h_1 = h_2$

$\Rightarrow f(ah_1) = f(ah_2)$

f birebirdir: $\forall ah_1, ah_2 \in aH$ için $f(ah_1) = f(ah_2)$

$\Rightarrow h_1 = h_2$

$\Rightarrow ah_1 = ah_2$

f örtendir: $\forall h \in H$ için $f(ah) = h$ oş $ah \in aH$ vardır

O halde $|aH| = |H|$ yazılır.